Konference Mladá věda
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

DOPRAVNÉ ÚLOHY A ICH VYUŽITIE PRI ZABEZPEČOVANÍ PLOŠNEJ EVAKUÁCIE

Zuzana GAŠPARÍKOVÁ
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta bezpečnostného inžinierstva
Univerzitná 8215/1 010 26 Žilina, Slovenská republika
zuzana.gasparikova@fbi.uniza.sk

Abstrakt: *Dopravné úlohy sú jedným zo špecifických problémov lineárneho programovania. Jedná sa o optimalizačné úlohy, ktorých cieľom je minimalizovať celkové náklady na prepravu tovaru alebo osôb v rámci zložitých logistických procesov. Podstatou riešenia je optimalizácia systému rozvozu určitej homogénnej látky (napr. tovar, osoby alebo materiál) zo zdrojov (od dodávateľov) do cieľových miest (k odberateľom) s cieľom minimalizácie celkových nákladov spojených s rozvozom, príp. minimalizácia celkovej vzdialenosti. V oblasti plošnej evakuácie sa dopravné úlohy využívajú pri plánovaní optimálneho prevozu evakuantov z nástupných miest do evakuačných stredísk, pričom sa berie do úvahy najmä prepravná vzdialenosť a náklady na prepravu jednej osoby. Článok obsahuje návrh plánu evakuácie obyvateľov mikroregiónu ohrozeného povodňou. Pre určenie východiskového riešenia boli aplikované tri metódy (Metóda severozápadného rohu, Indexová metóda a Vogelova aproximačná metóda), najlepšie riešenie z nich bolo výpočtovým postupom optimalizované. Výsledky boli overené pomocou voľne dostupných softvérových nástrojov a bol stanovený optimálny plán prepravy evakuantov.*

Kľúčová slova: *evakuácia, dopravné úlohy, preprava, optimalizácia*

1 Dopravné úlohy a ich matematický model

Dopravné úlohy, resp. dopravné problémy patria medzi špeciálnu kategóriu úloh lineárneho programovania, tzv. distribučné problémy. Okrem dopravnej úlohy patria k distribučným problémom aj priraďovacie úlohy, úlohy rozmiestnenia zdrojov a ďalšie ich kombinácie. Dopravné úlohy patria historicky k najstarším úlohám lineárneho programovania (Jablonský 2007).

Cieľom takýchto úloh je rozvrhnutie rozvozu zbožia či materiálu od dodávateľov (zdrojov) k odberateľom (cieľovým miestam) tak, aby boli celkové náklady minimalizované. V dopravných úlohách je daných m dodávateľov $D_1, D_2, \dots, D_m$ s množstvom produkovaného tovaru $a_1, a_2, \dots, a_m$ a n odberateľov $O_1, O_2, \dots, O_n$ s požiadavkami v množstvách $b_1, b_2, \dots, b_n$. Vzťah medzi dodávateľom a odberateľom je určitým spôsobom ohodnotený c_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ na základe vyčíslených nákladov na prepravu tovaru a kilometrovej vzdialenosti zdroja a cieľového miesta. Je dôležité stanoviť objem prepravy medzi i - tym zdrojom a j – tym cieľovým miestom x_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ tak, aby neboli presiahnuté kapacity zdrojov, ale aby boli uspokojené požiadavky odberateľov.

Na základe počtu požiadaviek odberateľov a kapacít dodávateľov môžeme dopravné úlohy rozdeliť na vyrovnané a nevyrovnané. (tab. 1)

<table>
<tr><th>Vyrovnaný dopravný problém</th><th colspan="2">Nevyrovnaný dopravný problém</th></tr>
<tr><td>$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$</td><td colspan="2">$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$</td></tr>
<tr><td></td><td><u>Deficit spotreby</u>
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$</td><td><u>Deficit zdrojov</u>
$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$</td></tr>
</table>

Tab. 1: Rozdelenie dopravných úloh

Vyrovnaný dopravný problém spĺňa podmienku, kedy počet požiadaviek od odberateľov a kapacít zdrojov je rovnaký. V takomto prípade sú všetky kapacity dodávateľov vyčerpané a dopyt odberateľov uspokojený.

Pri *nevyrovnanom dopravnom probléme* ide o nesúlad medzi požiadavkami a kapacitami. Riešenie takejto úlohy môže prebehnúť až po transformácii tejto úlohy na úlohu vyrovnanú pridaním tzv. fiktívneho dodávateľa alebo odberateľa podľa toho, či ide o deficit spotreby alebo deficit zdrojov. Prepravné náklady v takomto prípade, keďže fiktívny dodávateľ ani odberateľ neexistujú, sú rovné nule, $c_{ij} = 0$.
Prepravné náklady $\boldsymbol{min\ z}$ potom vypočítame zo vzťahu:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . x_{ij} \tag{1}$$

2 Aplikácia vybraných metód dopravnej úlohy

Na ukážku bola zvolená úloha nevyrovnaná (viď zadanie úlohy), t.j. počet požiadaviek na evakuáciu určeného počtu obyvateľov nie je rovný počtu kapacít zvolených evakuačných stredísk. Kapacity stredísk prevyšujú počet evakuantov, z toho dôvodu bolo potrebné zaviesť fiktívne nástupné miesto, aby sa úloha transformovala na vyrovnanú. Počet obyvateľov nutných k evakuácii z jednotlivých miest je reálny, získaný z máp povodňového rizika [6], avšak počet kapacít zamýšľaných evakuačných stredísk je ilustračný, keďže tieto údaje nie sú verejne prístupné. Jednotlivé sadzby určujú priemerné náklady vynaložené na jedného obyvateľa, kde sa brala do úvahy prepravná vzdialenosť, cena pohonných hmôt, náklady spojené s aktiváciou a zabezpečením fungovania jednotlivých evakuačných stredísk a ich službami a následná preprava späť po ukončení evakuácie.

Zadanie dopravnej úlohy - Pri mimoriadnej udalosti spôsobenej 100-ročnou vodou na vodnom toku Rajčanka je počet potenciálne ohrozených obyvateľov hĺbkou storočnej vody 606 obyvateľov v Rajeckých Tepliciach, 1227 obyvateľov z Lietavskej Lúčky a 127 obyvateľov obce Porúbka. V prípade evakuácie sú stanovené 4 evakuačné strediská Lietavská Lúčka ZŠ, Lietavská Lúčka KD, Porúbka KD a Rajecké Teplice ZŠ. V ohrozených dedinách je 5 nástupných miest (Lietavská Lúčka 1, Lietavská Lúčka 2, Porúbka, Rajecké Teplice 1 a Rajecké Teplice 2), ku ktorým budú pristavené dopravné prostriedky na prevoz obyvateľov do evakuačných stredísk. V úlohe rátame s tým, že všetci ohrození obyvatelia budú do evakuačných stredísk prevezení pristavenými dopravnými prostriedkami a nevyužijú samoevakuáciu.

2.1 Aplikácia metód pre určovanie východiskového riešenia

Metóda severozápadného rohu

Metóda severozápadného rohu umožňuje pomerne rýchlo získať východiskové riešenie (tab. 2), ktoré je prijateľné, avšak nie je konečné. Táto metóda totiž neberie do úvahy výšku cien dopravných sadzieb ani vzdialenosť.
Riešenie dopravnej úlohy touto metódou začína v ľavom hornom (severozápadnom) rohu tabuľky, kedy sa počtom obyvateľov Lietavskej Lúčky 1 snažíme naplniť kapacity evakuačného strediska Lietavská Lúčka ZŠ, pričom nedbáme na výšky sadzieb c_{ij}. Keďže kapacita evakuačného strediska Lietavská Lúčka ZŠ bola naplnená, ďalší obyvatelia budú presunutí do evakuačného strediska Lietavská Lúčka KD. Po presunutí všetkých obyvateľov z nástupného miesta Lietavská Lúčka 1, pokračujeme postupne s presúvaním obyvateľov Lietavská Lúčka 2, Porúbka, Rajecké Teplice 1 a Rajecké Teplice 2.

	LL ZŠ	**LL KD**	**Porúbka KD**	**RT ZŠ**	Požiadavky na evakuáciu
Lietavská Lúčka 1	3 **670**	2 **38**	7	18	708
Lietavská Lúčka 2	2	3 **412**	10 **107**	21	519
Porúbka	7	6	3 **113**	13 **24**	137
Rajecké Teplice 1	17	16	12	4 **300**	300
Rajecké Teplice 2	18	17	12	2 **306**	306
$\boldsymbol{F_{nm}}$	0	0	0	0 **20**	20
Kapacity stredísk	670	450	220	650	1990

Tab. 2: Východiskové riešenie dopravnej úlohy metódou severozápadného rohu

$$\min z = 670.3 + 38.2 + 412.3 + 107.10 + 113.3 + 24.13 + 300.4 + 306.2 + 20.0 = \mathbf{6855€} \quad (2)$$

Indexová metóda

Indexová metóda sa používa na získanie východiskového riešenia s tým, že zohľadňuje aj sadzby a ich veľkosti a pri rovnakých sadzbách sa uprednostňuje políčko s väčším množstvom a najnižším cenovým koeficientom.
Pri aplikácii indexovej metódy transformujeme pôvodnú tabuľku, pričom zoberieme do úvahy aj veľkosti sadzieb c_{ij} a zistíme pomer požiadaviek na evakuáciu ku kapacite evakuačného strediska. Následne hodnoty v tabuľke zoradíme vzostupne podľa veľkosti sadzieb c_{ij}, pričom pri rovnakej hodnote c_{ij} berieme do úvahy podiel požiadaviek a kapacity strediska a zoradené hodnoty postupne dopĺňame do tabuľky (tab. 3).

	LL ZŠ	**LL KD**	**Porúbka KD**	**RT ZŠ**	Požiadavky na evakuáciu
Lietavská Lúčka 1	3 **131**	2 **450**	7 **83**	18 **44**	708
Lietavská Lúčka 2	2 **519**	3	10	21	519
Porúbka	7	6	3 **137**	13	137
Rajecké Teplice 1	17	16	12	4 **300**	300
Rajecké Teplice 2	18	17	12	2 **306**	306
$\boldsymbol{F_{nm}}$	0 **20**	0	0	0	20
Kapacity stredísk	670	450	220	650	1990

Tab. 3: Východiskové riešenie dopravnej úlohy indexovou metodou

$$\min z = 131.3 + 450.2 + 83.7 + 44.18 + 519.2 + 137.3 + 300.4 + 306.2 + 20.0 = \mathbf{5927€} \quad (3)$$

Vogelova aproximačná metóda

Pri Vogelovej aproximačnej metóde je potrebné vypočítať tzv. diferenciu, ktorá predstavuje rozdiel medzi najmenšími cenovými sadzbami v riadku, príp. stĺpci. V riadku (resp. stĺpci) s najvyššou diferenciou sa obsadí políčko s najnižšou sadzbou, diferencie sa znova prepočítajú a opakuje sa postup. Riešenie pomocou Vogelovej aproximačnej metódy spočíva vo vyjadrení spomínanej diferencie, ktorá v našom príklade predstavuje rozdiel medzi najmenšími sadzbami v riadku R_i a v stĺpci R_j. V prípade výskytu dvoch rovnakých najmenších sadzieb sa $R_{ij} = 0$. Tabuľku so zadaním rozšírime o jeden riadok a jeden stĺpec, v ktorom doplníme hodnoty diferencií (tab. 4).

	LL ZŠ	**LL KD**	**Porúbka KD**	**RT ZŠ**	Požiadavky na evakuáciu	R_i
LL 1	3	2	7	18	708	1
LL 2	2	3	10	21	519	1
Porúbka	7	6	3	13	137	3
RT 1	17	16	12	4	300	8
RT 2	18	17	12	2	306	10
$\boldsymbol{F_{nm}}$	0	0	0	0	20	0
Kapacity stredísk	670	450	220	650	1990	
R_j	2	2	3	2		

Tab. 4: Zadanie dopravnej úlohy s vypočítanými diferenciami

Riešenie začíname riadkom, resp. stĺpcom s najvyššou hodnotou diferencie, pričom sa snažíme naplniť kapacitu evakuačného strediska a zároveň rozmiestniť čo najviac obyvateľov. Potom sa už použitý riadok, resp. stĺpec neberie do úvahy, opäť sa prepočítajú diferencie pre zvyšné riadky a stĺpce a postup sa opakuje až kým sa nerozmiestni požadovaný počet obyvateľov a nenaplní sa kapacita evakuačných stredísk (tab. 5).

	LL ZŠ	**LL KD**	**Porúbka KD**	**RT ZŠ**	Požiadavky na evakuáciu
Lietavská Lúčka 1	3 **151**	2 **450**	7 **107**	18	708
Lietavská Lúčka 2	2 **519**	3	10	21	519
Porúbka	7	6	3 **113**	13 **24**	137
Rajecké Teplice 1	17	16	12	4 **300**	300
Rajecké Teplice 2	18	17	12	2 **306**	306
$\boldsymbol{F_{nm}}$	0	0	0	0 **20**	20
Kapacity stredísk	670	450	220	650	1990

Tab. 5: Východiskové riešenie dopravnej úlohy Vogelovou aproximačnou teóriou

$$\min z = 151.3 + 450.2 + 107.7 + 519.2 + 113.3 + 24.13 + 300.4 + 306.2 + 20.0 = \mathbf{5603€} \qquad (4)$$

Porovnaním riešení pomocou jednotlivých vybraných metód pre východiskové riešenie dopravnej úlohy (metóda severozápadného rohu, indexová metóda a Vogelova aproximačná metóda) sme zistili, že optimálne riešenie vyšlo pomocou Vogelovej aproximačnej metódy (tab. 6). Najmenej optimálne je riešenie pomocou metódy severozápadného rohu, keďže táto metóda neberie do úvahy jednotlivé sadzby c_{ij}.

Použitá metóda	**min z**
Metóda severozápadného rohu	6855€
Indexová metóda	5927€
Vogelova aproximačná metóda	**5603€**

Tab. 6: Porovnanie vybraných metód pre východiskové riešenie

2.2 Overenie optimálnosti východiskového riešenia VAM

Na zistenie, či je riešenie pomocou Vogelovej aproximačnej metódy naozaj optimálne, použijeme maticu diferencií. ***Matica diferencií*** určuje kritérium optimálnosti riešenia. Pre zistenie matice diferencií D musí platiť nasledovný vzťah:

$$D = C - C^* \qquad (5)$$

kde C je matica sadzieb a C^* predstavuje maticu nepriamych sadzieb. Na zistenie matice nepriamych sadzieb je potrebné určiť riadkové a stĺpcové čísla, kedy súčet riadkového a stĺpcového čísla sa rovná príslušnej sadzbe $(r_i + s_j = c_{ij})$.

$$C^* = \begin{pmatrix} r_1+s_1 & r_1+s_2 & r_1+s_3 & r_1+s_4 \\ r_2+s_1 & r_2+s_2 & r_2+s_3 & r_2+s_4 \\ r_3+s_1 & r_3+s_2 & r_3+s_3 & r_3+s_4 \\ r_4+s_1 & r_4+s_2 & r_4+s_3 & r_4+s_4 \\ r_5+s_1 & r_5+s_2 & r_5+s_3 & r_5+s_4 \end{pmatrix}$$

Z rozdielu matice C a matice nepriamych sadzieb C^* vieme určiť maticu diferencií D, ktorá je kritériom optimálnosti riešenia.

Pri určovaní matice nepriamych sadzieb budeme vychádzať z tab. 6 z východiskového riešenia pomocou Vogelovej aproximačnej metódy: (6)

$r_1 + s_1 = 3$ $\quad \rightarrow zvolím\ s_4 = 0$
$r_1 + s_2 = 2$ $\quad \rightarrow potom\ r_1 = 17;\ r_2 = 16;\ r_3 = 13;\ r_4 = 4;\ r_5 = 2; r_6 = 0;$
$r_1 + s_3 = 7$ $\quad s_1 = -14;\ s_2 = -15;\ s_3 = -10.$

$r_2 + s_1 = 2$
$r_3 + s_3 = 3$
$r_3 + s_4 = 13$
$r_4 + s_4 = 4$
$r_5 + s_4 = 2$
$r_6 + s_4 = 0$

$$C - C^* = D$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 18 \\ 2 & 3 & 10 & 21 \\ 7 & 6 & 3 & 13 \\ 17 & 16 & 12 & 4 \\ 18 & 17 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 17 \\ 2 & 1 & 6 & 16 \\ -1 & -2 & 3 & 13 \\ -10 & -11 & -6 & 4 \\ -12 & -13 & -8 & 2 \\ -14 & -15 & -10 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 27 & 27 & 18 & 0 \\ 30 & 30 & 20 & 0 \\ 14 & 15 & 10 & 0 \end{pmatrix} \text{ matica diferencií}} \quad (7)$$

Keďže je výsledná matica diferencií bez záporných čísel, môžeme potvrdiť, že východiskové riešenie zistené Vogelovou aproximačnou metódou je optimálne.

2.3 Overenie výsledkov pomocou softvérových nástrojov

Na overenie našich výsledkov sme použili dva voľne dostupné softvérové nástroje na stránkach *www.easycalculation.com* (obr. 1) a *www.cbom.atozmath.com* (obr. 2). Obidve spomínané webové stránky ponúkajú riešenie dopravných úloh (transportation problem) pomocou viacerých metód a zároveň dokážu každé riešenie optimalizovať pomocou *Optimal solution MODI method*. Každá z týchto aplikácií nám potvrdila naše riešenie a predpoklad, že riešenie Vogelovou aproximačnou metódou je optimálne, čo sme dokázali aj pomocou matice diferencií.

Iteration 9

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 / 151	2 / 450	7 / 107	18	151
S2	2 / 519	3	10	21	519
S3	7	6	3 / 113	13 / 24	113
S4	17	16	12	4 / 300	300
S5	18	17	12	2 / 306	306
S6	0	0	0	0 / 20	20
Demand	519	450	107	24	

Total Minimum Cost

(3 × 151 + 2 × 450 + 7 × 107 + 2 × 519 + 3 × 113 + 13 × 24 + 4 × 300 + 2 × 306 + 0 × 20)

5603

Obr. 1: Riešenie zadanej dopravnej úlohy na www.easycalculation.com (zdroj:[9])

So final optimal solution is arrived.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	3 (151)	2 (450)	7 (107)	18	708
S_2	2 (519)	3	10	21	519
S_3	7	6	3 (113)	13 (24)	137
S_4	17	16	12	4 (300)	300
S_5	18	17	12	2 (306)	306
S_6	0	0	0	0 (20)	20
Demand	670	450	220	650	

The minimum total transportation cost $= 3 \times 151 + 2 \times 450 + 7 \times 107 + 2 \times 519 + 3 \times 113 + 13 \times 24 + 4 \times 300 + 2 \times 306 + 0 \times 20 = 5603$

Obr. 2: Riešenie zadanej dopravnej úlohy na www.cbom.atozmath.com (zdroj: [8])

3 Interpretácia výsledkov

Zo zadania dopravnej úlohy bolo potrebné určiť optimálny rozvozný plán obyvateľov postihnutých povodňou z obcí Lietavská Lúčka, Porúbka a Rajecké Teplice do evakuačných stredísk situovaných v týchto troch obciach. Východiskové riešenie sme získali pomocou troch metód: metódy severozápadného rohu, indexovej metódy a Vogelovej aproximačnej metódy. Testom optimalizácie sme zistili, že riešenie Vogelovou aproximačnou metódou je optimálne, a teda nám určuje optimálny rozvozný plán. Do evakuačného strediska Lietavská Lúčka ZŠ by sme rozviezli dokopy 670 obyvateľov z Lietavskej Lúčky (151 zo zastávky Lietavská Lúčka 1 a všetkých obyvateľov t.j. 519 z miesta Lietavská Lúčka 2) Evakuačné stredisko Lietavská Lúčka KD naplníme 450 obyvateľmi z miesta nástupu Lietavská Lúčka 1. Obec Porúbka má evakuačné stredisko s kapacitou 220 ľudí, ktoré bude naplnené 113 obyvateľmi Porúbky a 107 obyvateľmi Lietavskej Lúčky. Obyvatelia z dvoch nástupných miest v Rajeckých Tepliciach a 24 obyvateľov Porúbky bude prevezených do evakuačného strediska Rajecké Teplice ZŠ s kapacitou 650 ľudí.

4 Záver

Operačná analýza a jej súčasti využívajú matematiku ako nástroj, vďaka ktorému riešia problémy, ktoré môžu nastať v riadení. Výsledky získané matematickými výpočtami určujú rozhodnutia, vyhodnocujú ich uplatnenie, čím výrazne ovplyvňujú život obyvateľov pri ich prípadnej ochrane pred prírodnými vplyvmi či priemyselnými haváriami, ktoré môžu vyvolať krízovú situáciu s potrebou evakuácie. V tomto článku bola pomocou prípadovej štúdie ukázaná možnosť aplikácie dopravných úloh pri krízovom riadení a rovnako aj využitie softvérovej podpory, keďže technológie nám v tomto prípade môžu výrazne dopomôcť hlavne skrátením času potrebného na prípravu a prevenciu pred krízovými javmi.

Poďakovanie
Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0159/19 Hodnotenie úrovne odolnosti kľúčových prvkov pozemnej dopravnej infraštruktúry.

Literatura

[1] Dopravná úloha. *Distribučné problémy - príklady* [online] [cit. 29.9.2020] Dostupné z: http://www.fsi.uniza.sk/ktvi/leitner/2_predmety/OA/Semester/EX05_Distribucne%20problemy%20upr.pdf
[2] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum.* Praha: Professional publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3
[3] KAŠPAR, Vladislav. *Vybrané metódy operačnej analýzy vo vojenskej doprave a vojenskom staviteľstve.* Žilina: FŠI ŽU, 1998. ISBN 80-88829-27-5
[4] MÁCA, Jaromír a LEITNER, Bohuš. *Operačná analýza I.* Žilina: FŠI ŽU, 1998. ISBN 80-88829-39-9
[5] PEKARČÍKOVÁ, Miriam, FIĽO, Milan a TREBUŇA, Peter. *Metódy riešenia distribučných úloh*: *zborník z XIII. Medzinárodnej vedeckej konferencie Manažérstvo životného prostredia*. Bratislava 18.-19. apríl 2013. ISBN 978-80-89281-90-9
[6] Slovenský vodohospodársky podnik, š.p. *Mapy povodňového ohrozenia a mapy povodňového rizika vodných tokov Slovenska.* [online] [cit. 15.9.2020] Dostupné z: http://mpompr.svp.sk/okres.php?id=42

[7] ŠIMKOVÁ, Valéria. *Dopravné úlohy.* [online] [cit. 26.9.2020] Dostupné z: https://spu.fem.uniag.sk/cvicenia/ksov/fandel/Operacny_vyskum--optimalne_programovanie/10%20-%20dopravne%20ulohy/Literatura/Simkova-Dopravne_ulohy.pdf
[8] Transportation Problem Calculator. *Transportation problem using vogel´s approximation method.* [online] [cit. 15.9.2020] Dostupné z: https://cbom.atozmath.com/CBOM/transportation.aspx
[9] Vogels Approximation Method Calculator. *Minimum Transportation Cost Calculator/VAM Calculator* [online] [cit. 16.9.2020] Dostupné z: https://www.easycalculation.com/operations-research/minimum-transportation-vogel-approximation-method.php